www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ANNÉE 1990

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE A OPTION (Durée : 3 heures - coefficient : 9)

MATHEMATIQUES

M - P

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de type (2,2), et $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices orthogonales directes. On note ${}^tM$ la matrice transposée de M, et on pose $f(M) = tr({}^tM\,M)$. trace de la matrice ${}^tM\,M$.

1°/ Montrer que l'application qui à toute matrice M de E fait correspondre $\sqrt{f(M)}$ est une norme sur E . On la notera $\|M\| = \sqrt{f(M)}$.

2°/ Soit G l'ensemble des matrices de E de déterminant 1, et C_α le sous-ensemble des matrices M de G dont la norme est un réel positif α donné : $\|M\| = \alpha$.

a) Soit M une matrice de C_α , déterminer le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tM\,M$.

b) La matrice ${}^tM\,M$ est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que, lorsque M décrit l'ensemble G, $\|M\|$ admet un minimum α_0 , et le calculer.

d) Montrer que l'ensemble C_{α_0} est égal à $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

On se donne, dans toute la suite du problème, le réel α strictement supérieur à α_0 .

3°/ a) Soient M et M' deux matrices dans l'ensemble C_α , montrer que les matrices ${}^tM\,M$ et ${}^tM'\,M'$ sont semblables, ainsi que les matrices $M\,{}^tM$ et $M'\,{}^tM'$.

b) Soit M une matrice dans C_α , P_1 et P_2 deux matrices dans C_{α_0} . On pose $M' = P_1\,M\,P_2$, montrer que M' appartient à C_α .

T.S.V.P.

c) Réciproquement, soient M et M' deux matrices quelconques dans C_α . Montrer qu'il existe P_1 et P_2 dans C_{α_0} , telles que $M' = P_1 M P_2$.

Montrer que si (P_1, P_2) vérifie la condition précédente, alors le seul autre couple vérifiant la même condition est $(-P_1 , -P_2)$.

4°/ a) Déterminer dans C_α les matrices qui sont diagonales. On notera $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ celle dont les éléments diagonaux sont positifs avec

$\delta_1 > \delta_2 > 0$. Calculer δ_1 et δ_2 quand on pose $\alpha^2 = 2 \operatorname{ch} 2u$, avec $u > 0$.

b) Soit S_α le sous-ensemble des matrices de C_α qui sont symétriques et dont les valeurs propres sont positives. Soit M dans C_α , P_1 et P_2 dans C_{α_0} telles que $M = P_1 \Delta P_2$.

Montrer que M appartient à S_α si et seulement si $P_1 P_2 = I$ (matrice unité).

c) On pose $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, M décrivant S_α . On appelle A et B les points de coordonnées (a,b) et (b,d) dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit θ l'angle, défini à 2π près, de la rotation représentée par la matrice P_1 , montrer que A et B décrivent deux cercles C_1 et C_2 lorsque M décrit S_α ; Préciser les centres I_1 et I_2 de C_1 et C_2 , ainsi que leurs rayons. (On rappelle que α, et donc u, sont constants). Quel est l'angle des vecteurs $\overrightarrow{I_1 A}$ et $\overrightarrow{I_2 B}$?

d) Déterminer l'ensemble décrit dans ces conditions par le milieu Q de AB .

e) Montrer que la médiatrice de AB passe par un point fixe.

f) Donner, toujours dans les conditions précédentes, une équation de l'enveloppe Γ de la droite AB , et préciser la nature de la courbe Γ .

—=o0o=—

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail